Prova 1 - MAT562 2015.2
Probabilidade
Prof. Tertuliano Franco
Duração: 4h. Data 01/10/2014

1. **[1 pt]** Seja $(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $A_1, A_2, \ldots \in \mathbb{A}$. Mostre que
$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \geq 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k^{\complement}).$$

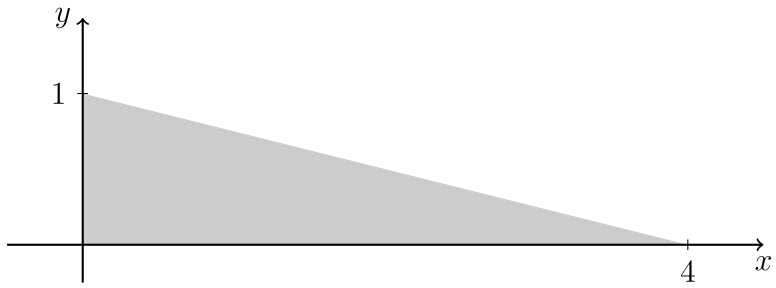
2. **[1,5 pt]** Sejam A e B independentes. Mostre que $A^{\complement}$ e $B^{\complement}$ são independentes.

3. **[1,5 pt]** Sejam $X \sim \exp(\lambda)$ e $Y \sim U[0,1]$ independentes. Qual a probabilidade de que X seja menor que Y?

4. **[1,5 pt]** Sejam X, Y independentes, X com distribuição (λ_1) e Y com distribuição Poisson(λ_2). Mostre que $X + Y$ tem distribuição Poisson($\lambda_1 + \lambda_2$).

5. **[1,5 pt]** Seja $Y \geq 0$ com $\mathbb{E}Y^2 < \infty$. Aplique a desigualdade de Cauchy-Schwarz à variável aleatória $Y\mathbb{1}_{[Y>0]}$ para concluir que
$$\mathbb{P}\Big[Y > 0\Big] \;\geq\; \frac{(\mathbb{E}Y)^2}{\mathbb{E}Y^2}\,.$$

6. **[1,5 pt]** Seja (X, Y) escolhido uniformemente na seguinte região abaixo. Calcule a covariância entre X e Y.



7. **[1,5 pt]** Seja X integrável, $\mu = \mathbb{E}X$. Mostre que
$$\text{Var}X = \mathbb{E}(X-\mu)^2 = \min_{c\in\mathbb{R}} \mathbb{E}(X-c)^2.$$
Conclua que se $a \leq X \leq b$, então Var$(X) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$.