Lista 2 - MAT562 2015.2
Probabilidade
Prof. Tertuliano Franco

1. **[Integração Monte Carlo]** Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ função contínua. Sejam $U_1, U_2, \dots$ i.i.d uniformes em $[0,1]$ e defina

$$I_n \;=\; \frac{f(U_1)+\cdots+f(U_n)}{n}\,.$$

   (a) Mostre que $I_n \to \int_0^1 f(x)dx$ em probabilidade.

   (b) Use Tchebyshev para estimar $\mathbb{P}\Big[\,\big|I_n - \int_0^1 f(x)dx\big| > \varepsilon\,\Big]$.

2. (a) Mostre que se $X \geq 0$ assume apenas valores inteiros, então

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[X \geq n]\,.$$

   (b) Encontre expressão similar para $\mathbb{E}[X^2]$.

3. Generalize a Lei Fraca L^2 da seguinte maneira. Sejam $X_1, X_2, \dots$ tais que $\mathbb{E}[X_k] = 0$ para todo k e $\mathbb{E}[X_n X_k] \leq f(n-k)$ para $k \leq n$, onde f é uma função satisfazendo

$$\lim_{j\to\infty} f(j) \;=\; 0\,.$$

   Mostre que

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathrm{P}} 0\,.$$

4. Sejam $A_1, A_2, \dots$ eventos do espaço de probabillidade $(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P})$. Mostre que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) \;=\; 0$$

   se, e somente se,

$$\mathbb{1}_{A_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

5. Mostre que se lançarmos uma moeda honesta infinitas vezes, com probabilidade um observaremos um número infinito de caras.

6. Sejam $X_1, X_2, \dots$ variáveis aleatórias tais que X_n tem distribuição $U[0, a_n]$., com $a_n > 0$. Mostre que

   (a) Se $a_n = n^2$, somente um número finitos das variáveis aleatórias X_n assume valores menores do que um.

(b) Se $a_n = n$, um número infinito das variáveis aleatórias X_n assume valores menores do que um.

7. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes tais que $\mathbb{P}(X_n = 1) = 1/n$ e $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - 1/n$. Mostre que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ mas $\mathbb{P}\Big(X_n \to 0\Big) = 0$.

8. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas comodistribuição exponencial de parâmetro 1. Mostre que

$$\mathbb{P}\Big(\frac{X_n}{\log n} > 1 \;\text{ infinitas vezes}\Big) \;=\; 1\,,$$

mas

$$\mathbb{P}\Big(\frac{X_n}{\log n} > 2 \;\text{ infinitas vezes}\Big) \;=\; 0\,.$$

9. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tais que $X_1 \sim U[0,1]$. Prove que $n^{-X_n} \overset{\mathbb{P}}{\to} 0$ mas $n^{-X_n} \overset{\text{q.c.}}{\not\to} 0$.

10. Mostre que se $X_n \geq 0$ e $X_n \geq X_{n+1}$ para todo n, e $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, então $X_n \xrightarrow{\text{q.c.}} 0$.

11. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias.

(a) Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[|X_n| > n] < +\infty$, então

$$\limsup \frac{|X_n|}{n} \;\leq\; 1 \quad \text{quase certamente.}$$

(b) Mostre que se as variáveis são i.i.d e integráveis, vale o mesmo resultado, ou seja,

$$\limsup \frac{|X_n|}{n} \;\leq\; 1 \quad \text{quase certamente.}$$

12. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d com distribuição $U[0,1]$. Encontre o limite quase certo da média geométrica

$$\Big(\prod_{k=1}^{n} X_k\Big)^{\frac{1}{n}}$$

quando $n \to \infty$.

13. Seja $0 < \theta < 1/2$. Prove que se $X_1, X_2, \ldots$ são independentes tais que

$$\mathbb{P}[X_n = n^{\theta}] = \mathbb{P}[X_n = -n^{\theta}] = 1/2\,,$$

então

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{quase certamente}$$

quando $n \to \infty$.

14. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias i.i.d com densidade

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x+\frac{1}{2}}\,, & \text{se } x \geq -\frac{1}{2}\,, \\ 0\,, & \text{se } x < -\frac{1}{2}\,. \end{cases}$$

Mostre que $S_n \to \infty$ quase certamente quando $n \to \infty$.

15. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d tais que $\mathbb{E}X_1 = 1 = \mathrm{Var}X_1$. Mostre que

$$\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2}} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{quase certamente}$$

quando $n \to \infty$.

16. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias. Mostre que existe uma sequência de números reais $a_n \to \infty$ tal que

$$\frac{X_n}{a_n} \longrightarrow 0 \quad \text{quase certamente}$$

quando $n \to \infty$.

17. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias. Mostre que

$$\sup_n X_n \;<\; +\infty \quad \text{quase certamente,}$$

se, e somente se, para algum $A > 0$ vale que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[X_n > A] < \infty.$$

18. Dê exemplo de eventos $A_1, A_2, \ldots$ tais que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) \;=\; \infty$$

mas $\mathbb{P}[A_n \text{ i. v.}] = 0$.