Lista 1 - MAT562 2015.2
Probabilidade
Prof. Tertuliano Franco

1. Sejam A e B eventos com probabilidades $\mathbb{P}(A) = 3/4$ e $\mathbb{P}(B) = 1/3$. Mostre que $\frac{1}{12} \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \frac{1}{3}$ e dê exemplos para mostrar que ambos os extremos são possíveis. Encontre cotas análogas para $\mathbb{P}(A \cup B)$.

2. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$. Mostre que
$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \geq 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\big(A_k^{\complement}\big).$$

3. **A falácia do advogado**. Seja G o evento em que um acusado é culpado, e T o evento em que um certo testemunho é verdadeiro. Alguns advogados argumentam se baseando em $\mathbb{P}(G|T) = \mathbb{P}(T|G)$. Mostre que isso vale se, e somente se, $\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(T)$.

4. Mostre que a interseção de enumeráveis eventos de probabilidade um tem probabilidade 1.

5. Sejam A e B independentes. Mostre então que $A^{\complement}$ e B são independentes. Interprete.

6. Seja $\Omega = \{1, \ldots, p\}$, onde p é um número primo, seja $\mathcal{F}$ a σ-álgebra de todos os subconjuntos de Ω e seja $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{p}$. Mostre que se A e B são eventos independentes, então pelo menos um dos dois conjuntos é $\varnothing$ ou Ω.

7. **Perda de Memória**. Prove que se $X \sim \exp(\lambda)$, então
$$P\Big[X > t + s \Big| X > t\Big] = \mathbb{P}\Big[X > s\Big] \tag{1}$$ eq1

8. Prove o equivalente do resultado anterior para $X \sim$ Geom(p).

9. Prove que a única distribuição de probabilidade com densidade, não negativa, satisfazendo a perda de memória definida em (1), é a distribuição exponencial.

10. **O Método Probabilístico**. Dez por cento da superfície de uma esfera foi pintada de azul, e o resto de vermelho. Mostre que independentemente da maneira como a superfície foi pintada, sempre é possível inscrever um cubo na esfera tal que todos os vértices do cubo sejam vermelhos.

11. Uma variável aleatória X tem função de distribuição F. Qual a função de distribuição de $Y = aX + b$?

12. Mostre que, se f e g são densidades e $0 \leq s \leq 1$, então $sf + (1-s)g$ é uma densidade. A função fg é uma densidade?

13. **Paradoxo de Galton.** Jogamos ao mesmo tempo três moedas honestas. Pelo menos duas moedas terão o mesmo resultado, e a probabilidade de que a terceira moeda seja cara ou coroa é a mesma. Logo

$$\mathbb{P}(\text{ todas moedas saem com o mesmo resultado }) = \frac{1}{2}.$$

Você concorda?

14. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes com distribuição uniforme no intervalo $[\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2}]$. Calcule a função de distribuição de $X - Y$. Calcule a densidade de $X - Y$. Conclua que ambas não dependem de θ.

15. Mariana quer enviar uma carta a Aderbal. A probabilidade de que Mariana escreva a carta é de 0,8. A probabilidade de que o correio não a perca dado que Mariana a escreveu é 0,9. A probabilidade de que o carteiro entregue na casa certa, dado que o correio não a perdeu, é de 0,7.

Dado que Aderbal não recebeu a carta, qual a probabilidade de que Mariana não a tenha escrito?

16. Mostre que soma de Poisson independentes é variável aleatória Poisson com a soma dos parâmetros.

17. Mostre que o ínfimo de exponenciais independentes é exponencial com a soma dos parâmetros.

18. Seja X integrável, $\mu = \mathbb{E}X$. Mostre que

$$\mathrm{Var}X = \mathbb{E}(X-\mu)^2 = \min_{c \in \mathbb{R}} \mathbb{E}(X-c)^2.$$

Conclua que se $a \leq X \leq b$, então $\mathrm{Var}(X) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$.

19. Sejam X, Y, Z i.i.d com distribuição uniforme em $[0,1]$. Calcule a probabilidade de que X, Y, Z possam formar um triângulo.

20. Calcule a densidade correspondente à função de distribuição (se houver)

    (a) $F(x) = \frac{2}{\pi} \arctan(x)$.

    (b) $F(x) = \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$.

    (c) $F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x}, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$

    (d) $F(x) = \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}$.

21. Seja X, Y i.i.d com distribuição $\exp(\lambda)$. Calcule $\mathbb{P}(X < 2Y)$.

22. O número real m é dito ser mediana da função de distribuição F se

$$\lim_{y \uparrow m} F(y) \leq \tfrac{1}{2} \leq F(m).$$

Mostre que toda função de distribuição tem uma mediana e que conjunto de medianas de F é um intervalo fechado de $\mathbb{R}$. Dê um exemplo de função de distribuição F cujo conjunto de medianas é o intervalo $[2, 3]$.

23. Seja U v.a. uniforme em $[0, 1]$ e $0 < q < 1$. Mostre que

$$X = 1 + \left\lfloor \frac{\log U}{\log q} \right\rfloor$$

tem distribuição geométrica.

24. Um ponto de coordenadas (X, Y) é escolhido uniformemente no círculo $x^2 + y^2 \leq 1$. Qual a distribuição de $Z = \frac{X}{Y}$? (sem fazer muitas contas)

25. **A Agulha de Buffon**. Suponha que o chão $\mathbb{R}^2$ esteja dividido por enumeráveis retas paralelas distando t entre duas retas próximas. Considere uma agulha de tamanho $\ell < t$ e jogue-a ao acaso no chão. Mostre que a probabilidade da agulha interceptar alguma reta é $\frac{2\ell}{t\pi}$. Interprete como podemos usar este resultado para calcular numericamente o valor de π.

26. Use a inversa generalizada de uma função não decrescente para construir $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tal que, dada $X \sim U[0, 1]$, então $f(X)$ tem distribuição $\exp(\lambda)$. Use isso e uma calculadora científica (que tem a função `random`) para criar exibir uma amostra de dez valores com resultados de exponenciais independentes.

27. Demonstre: se $A_1, A_2, \ldots$ e $B_1, B_2, \ldots$ são eventos tais que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1$ e $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n) = p$, então $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n \cap B_n) = p$.

28. No jogo de *Craps*, dois dados são jogados simultaneamente. Se o jogador tira 7 ou 11 pontos, ele ganha. se ele tira 2, 3 ou 12, ele perde. Nos outros casos ele continua até sair 7, caso em que ele perde, ou então sair o primeiro resultado, caso em que ele ganha. Descreva o espaço amostral. Mostre que a probabilidade de vitória é $\frac{244}{495}$.

29. Em um teste de múltipla escolha, a probabilidade do aluno saber a resposta é p. Havendo m escolhas, se ele sabe a resposta, ele responde corretamente com probbabilidade 1. Se não sabe, ele responde corretamente com probabilidade $\frac{1}{m}$. Qual a probabilidade de que o aluno sabia a resposta dado que ele respondeu corretamente? Calcule esta probabilidade quando:

    (a) $m \to \infty$ com p fixo.

    (b) $p \to \infty$ com m fixo.

30. Sejam $A_1, \ldots, A_n$ eventos independentes com $p_k = \mathbb{P}(A_k)$. Obtenha a probabilidade de ocorrência dos seguintes eventos em função de $p_1, \ldots, p_n$.

(a) A ocorrência de nenhum dos A_k.

(b) A ocorrência de pelo menos um deles.

(c) A ocorrência de exatamente um deles.

(d) A ocorrência de exatamente dois deles.

(e) A ocorrência de todos eles.

(f) A ocorrência de no máximo $n-1$ deles.

31. Seja X v.a. com densidade

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2}, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Calcule a função de distribuição de $Y = \min(X, c)$, onde $c \in \mathbb{R}$.

32. Uma urna contém três bolas numeradas $1, 2, 3$. Duas bolas são tiradas sucessivamente da urna, ao acaso e sem reposição. Seja X o número da primeira bola e Y o número da segunda.

(a) Descreva a distribuição conjunta de X e Y.

(b) Calcule $\mathbb{P}(X < Y)$.

33. Demonstre que se uma variável aleatória X é independente de si mesma, então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $X = c$ quase certamente.

34. Um ponto é selecionado uniformemente do seguinte losango: