Teoria Espectral Prova 3 09/07/15

GABARITO bem RESUMIDO

PARTE 1

p polinômio real

① a) T auto-adjunto $\Rightarrow$ $p(T)$ auto-adjunto

$p(T)^2 \geq 0$ pois $\langle p(T)^2 \xi, \xi \rangle =$

$= \langle p(T)\xi, p(T)\xi \rangle \geq 0$, $\forall \xi \in H$

$p(T)(T-\alpha)p(T) \geq 0$ pois

$\langle p(T)(T-\alpha)p(T)\xi, \xi \rangle = \langle (T-\alpha)p(T)\xi, p(T)\xi \rangle$

≥ 0, pois $\alpha \leq T \leq \beta$

Analogamente $p(T)(\beta - T)p(T) \geq 0$.

Linearidade implica $\pi(p) \geq 0$

b) Seja $f \in \mathcal{A}$, $\|f\|_\infty \leq 1$. Daí $1 - f\bar{f} \geq 0$

$\Rightarrow \pi(1 - f\bar{f}) \geq 0$. Logo, $\forall \xi \in H$,

$\langle \pi(1 - f\bar{f})\xi, \xi \rangle \geq 0 \iff \|\xi\|^2 \geq \|\pi(f)\xi\|^2$

$\Rightarrow \pi$ é limitada.

② a) $\pi(\chi_E)^* = \pi(\overline{\chi_E}) = \pi(\chi_E)$, logo $\pi(\chi_E)$ é auto-adjunto

$\pi(\chi_E)\pi(\chi_E) = \pi(\chi_E^2) = \pi(\chi_E)$, logo $\pi(\chi_E)$ é idempotente

b) $\pi(\chi_E)\pi(\chi_F) = \pi(\chi_E \chi_F) = 0$, pois $E \cap F = \emptyset$

c) Como $\lambda_i \in V_i \overset{\text{critério}}{\Rightarrow} \pi(\chi_{V_i}) \neq 0$. Seja $\xi_i \overset{\neq 0}{\in} F_i$, onde $\pi(\chi_{V_i}) = P_{F_i}$. Daí

$$\left[\alpha_1 \pi(\chi_{V_1}) + \cdots + \alpha_n \pi(\chi_{V_n})\right]\xi_i =$$

$$= \alpha_i \xi_i \Rightarrow \alpha_i = 0$$

③ Seja T normal limitado $\Rightarrow$ T é unitariamente equiv. a M_g, $g: X \to \mathbb{R}$, $\sup_x |g(x)| < +\infty$.

Defina $f(T) = M_{f \circ g}$ e verifique propriedades.

(4) Temos que mostrar que

$$\dim \operatorname{Im}(T+i)^{\perp} = \dim \operatorname{Im}(T-i)^{\perp}$$

$C^2 = I \Rightarrow C$ bijetiva.

<u>Afirm</u>: $C\left(\operatorname{Im}(T+i)^{\perp}\right) \subseteq \operatorname{Im}(T-i)^{\perp}$

$$\varphi \in \operatorname{Im}(T+i)^{\perp} \Rightarrow \langle \varphi, (T+i)\xi \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle C\varphi, C(T+i)\xi \rangle = 0$$

anti-linear

$$\Rightarrow \langle C\varphi, CT\xi - iC\xi \rangle = 0$$

$CT = TC$

$$\Rightarrow \langle C\varphi, (T-i)C\xi \rangle = 0, \ \forall \xi \in \operatorname{dom} T$$

$C\xi \in \operatorname{dom} T$

$$\Rightarrow \langle C\varphi, (T-i)C^2\xi \rangle = 0, \ \forall \xi \in \operatorname{dom} T$$

$C^2 = I$

$$\Rightarrow \langle C\varphi, (T-i)\xi \rangle = 0, \ \forall \xi \in \operatorname{dom} T$$

$$\Rightarrow C\varphi \in \operatorname{Im}(T-i)^{\perp} \quad \square$$

Analogamente,

$$C(\operatorname{Im}(T-i))^{\perp} \subseteq \operatorname{Im}(T+i)^{\perp}$$

$$\Rightarrow \dim \operatorname{Im}(T-i)^{\perp} = \dim \operatorname{Im}(T+i)^{\perp}$$

OBS: verificar que aplicação antilinear bijetiva preserva dimensão

⑤ Seja $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, q_3, \dots\}$

$$\ell^2(\mathbb{Q}) = \{ (x_1, x_2, \dots) \;;\; \sum_{x_i \in \mathbb{C}} |x_i|^2 < +\infty \}$$

O vetor $(0, \dots, \underset{i\text{-ésimo}}{1}, 0, 0, \dots)$ é autovetor com auto-valor q_i (para o op. M_h) e a dimensão do auto-espaço é 1. Logo, pertence ao espectro. Como os racionais são densos em $\mathbb{R}$, o espectro essencial é $\mathbb{R}$.

Teoria Espectral Prova 3 09/07/15

GABARITO RESUMIDO $\boxed{\text{PARTE 2}}$

(6) T unitário	$g: X \to \mathbb{T}$ mensurável $\mathbb{T} = S^1 \subseteq \mathbb{C}$
T auto-adjunto limitado	$g: X \to \mathbb{R}$, mensurável $\sup_{x \in X} \lvert g(x) \rvert < +\infty$
T auto-adjunto	$g: X \to \mathbb{R}$ mensurável
T auto-adjunto unitário	$g: X \to [-1, 1]$ mensurável
T auto-adjunto $T \leq \beta$	$g: X \to \mathbb{R}$ $g(x) \leq \beta \quad \forall x$
T normal limitado $\sigma(T) \subseteq \{ z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z \geq \frac{1}{2} \}$	$g: X \to \mathbb{C}$ $\operatorname{Im}(g) \subseteq \{ z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Im} z \geq \frac{1}{2} \}$

⑦ Pelo Teorema Espectral, T é unitariamente equivalente a operador de multiplicação M_g, $g: X \to \mathbb{R}$, $\sup_x |g(x)| < +\infty$. Defina

$$\pi(h) = M_{h \circ g}, \quad \forall\, h: \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ h \in C(\mathbb{R})$$

⊛ Se $h_1, h_2 \in C(\mathbb{R})$ e $h_1 = h_2$ em $\sigma(M_g)$, então $\pi(h_1) = \pi(h_2)$, pois $h_1 \circ g = h_2 \circ g$ μ-q.t.p. Daí, podemos definir

$$\tilde{\pi} : C(\sigma(M_g)) \longrightarrow \mathcal{L}(H)$$
$$h \longmapsto \pi(\bar{h}),$$

onde $\bar{h}$ é uma extensão contínua qualquer de h. A observação ⊛ garante que $\tilde{\pi}$ está bem definida e é única.

⑧ a) Como A é simétrico $\Rightarrow \lambda_k \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Daí, $(A+i)e_k = (\lambda_k + i)e_k \neq 0$. Logo,

$$\operatorname{span}\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \operatorname{Im}(A+i)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im}(A+i)^{\perp} = \{0\} \Rightarrow \dim \operatorname{Im}(A+i)^{\perp} = 0$$

Analogamente, $\operatorname{Im}(A-i)^{\perp} = \{0\}$.

b) Como A é essencialmente auto-adjunto,

$$\operatorname{dom} \bar{A} = \overline{\operatorname{dom} A}^{\,g(A)}$$

c) Seja $M_g : \mathrm{dom}\, M_g \subseteq \ell^2(\mathbb{N}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N})$,
$$\psi \longmapsto \psi g$$

onde $g(k) = \lambda_k$. Como $\{e_k\}$ é base ortonormal do $\ell^2(\mathbb{N})$, M_g é unitariamente equivalente a $\overline{A}$

d) Como $\sigma(M_g) = \mathrm{supp}\; g*\mu$ e μ é medida de contagem, então
$$\sigma(M_g) = \overline{\{\lambda_k ;\ k \in \mathbb{N}\}}$$

(9) Simétrico $\langle T\phi, \psi\rangle = \langle \phi, T\psi\rangle$
Densamente definido: $C^1[0,1]$ é denso em $L^2[0,1]$. Pela questão anterior + sugestão, temos que
$$\sigma(T) = \{\lambda_k ;\ k \in \mathbb{N}\}$$
$$= \{\lambda \pi k,\ k \in \mathbb{N}\}$$

(10) Seja $\{\lambda_i\}$ um conjunto enumerável e denso em $K \subseteq \mathbb{C}$. Defina
$$g : (\mathbb{N}, \mu) \longrightarrow \mathbb{C} \qquad k \longmapsto \lambda_k$$
e μ = medida de contagem

$$\sigma(M_g) = \mathrm{supp}\; g*\mu = \overline{\{\lambda_i,\ i \in \mathbb{N}\}} = K$$