Prova 3 - MATD19 2015.1
Teoria Espectral
Prof. Tertuliano Franco
Data 09/07/2015
Duração: 3h+3h

1ª Parte

1. **[1pt]**

   (a) Assuma que todo polinômio não-negativo $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ pode ser escrito como soma finita

   $$f(t) = \sum_i p_i^2(t) + \sum_j (t-\alpha)\, q_j^2(t) + \sum_k (\beta - t)\, r_k^2(t)$$

   onde p_i, q_j e r_k são polinômios reais e seja $\alpha \leq T \leq \beta$ auto-adjunto limitado. Para um polinômio f, defina $\pi(f) = f(T)$. Mostre que se $f \geq 0$, então $\pi(f) \geq 0$.

   Atenção: $f(T)$ não é o cálculo funcional, é apenas o polinômio aplicado ao operador T.

   (b) Seja A a álgebra involutiva de polinômios $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$. Mostre que $\pi : A \to \mathcal{L}(H)$ definido acima é limitado.

2. **[1pt]** Seja $\pi : M^b(X) \to \mathcal{L}(H)$ o cálculo funcional boreliano para o operador auto-adjunto T.

   (a) Seja $E \subset X$ mensurável. Mostre que $\pi(\chi_E)$ é um operador de projeção (i.e., auto-adjunto e idempotente).

   (b) Sejam $E, F \subset X$ mensuráveis com $E \cap F = \varnothing$. Mostre que $\pi(\chi_E)$ e $\pi(\chi_F)$ são operadores de projeção sobre espaços ortogonais.

   (c) Sejam $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ pontos distintos do espectro de T e sejam $V_1, \ldots, V_n$ abertos disjuntos da reta, $\lambda_j \in V_j$ para todo $j = 1, \ldots, n$. Mostre que se

   $$\sum_{i=1}^{n} a_i\, \pi(\chi_{V_i}) \;=\; 0,$$

   então $a_i = 0$ para $i = 1, \ldots, n$.

3. **[1pt]** Construa o cálculo funcional contínuo e o cálculo funcional boreliano para um operador limitado normal $T \in \mathcal{L}(H)$ supondo o Teorema Espectral para operadores normais limitados (na forma multiplicativa).

4. **[1pt]** Seja T operador simétrico densamente definido no espaço de Hilbert H e $C : H \to H$ aplicação antilinear satisfazendo

   (a) $C^2 = I$.

   (b) Se $\eta \in \text{ dom } T$, então $C\eta \in \text{ dom } T$ e $CT\eta = TC\eta$.

   (c) Se $\eta, \xi \in H$, então $\langle C\eta, C\xi\rangle = \langle \xi, \eta\rangle$.

   Prove que T possui extensão auto-adjunta.

5. **[1pt]** Seja $H = \ell^2(\mathbb{Q})$ e $h(q) = q$, para todo $q \in \mathbb{Q}$. Determine $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{M}_h)$, o espectro essencial do operador de multiplicação $\mathcal{M}_h$.

Prova 3 - MATD19 2015.1
Teoria Espectral
Prof. Tertuliano Franco
Data 09/07/2015
Duração: 3h+3h

2ª Parte

6. **[1pt]** Abaixo, pelo Teorema Espectral, cada operador é unitariamente equivalente operador de multiplicação $\mathcal{M}_g$. Complete a tabela com o contradomínio de g em cada caso.

Propriedade do operador	**T unit. equiv. a $\mathcal{M}_g$, com**
T normal limitado	$g : X \to \mathbb{C}$, $\|g\|_\infty < \infty$
T unitário	
T auto-adjunto limitado	
T auto-adjunto	
T auto-adjunto unitário	
T auto-adjunto, $T \leq \beta I$	
T normal limitado, $\sigma(T) \subset \{z \in \mathbb{C}\,;\ \text{Im}\, z \geq 1/2\}$	

7. **[1pt]** Seja H Hilbert e $T : H \to H$ operador auto-adjunto limitado. Mostre que existe uma (e apenas uma) representação $\pi : C(\sigma(T)) \to \mathcal{L}(H)$ tal que $\pi(h) = T$, onde $h(x) = x$ para todo $x \in \sigma(T)$.

8. **[1pt]** Sejam A operador simétrico em H e $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ base ortonormal de H. Suponha que para todo k,

   - $e_k \in$ dom A.
   - $Ae_k = \lambda_k e_k$, onde $\lambda_k \in \mathbb{C}$.

   (a) Mostre que A é essencialmente auto-adjunto.

   (b) Determine o domínio de $\bar{A}$, a extensão auto-adjunta de A (basta escrevê-la em termos de algo como domínio, fecho, imagem etc. de A).

   (c) Determine um operador de multiplicação unitariamente equivalente ao operador $\bar{A}$.

   (d) Calcule o espectro de $\bar{A}$.

9. **[1pt]** Seja $A = \{\phi \in C^1[0,1] \ ; \ \phi(0) = \phi(1)\} \subset L^2[0,1]$. Mostre que o operador

$$\begin{cases} \text{dom}\, T &= A \\ T\phi &= \frac{1}{i}\phi' \end{cases}$$

   é simétrico, densamente definido e essencialmente auto-adjunto. Determine o espectro da extensão auto-adjunta deste operador.

   Como sugestão, use o seguinte fato da vida: $\{e^{2\pi kit}\}_{k\in\mathbb{N}}$ é base ortonormal de $L^2[0,1]$.

10. **[1pt]** Dado um compacto $K \subset \mathbb{C}$, construa um operador T normal limitado cujo espectro é exatamente K.