



Prova 3 - MATD19 2015.1
Teoria Espectral
Prof. Tertuliano Franco
Data 09/07/2015
Duração: 3h+3h



1ª Parte

1. [1pt]

- (a) Assuma que todo polinômio não-negativo $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser escrito como soma finita

$$f(t) = \sum_i p_i^2(t) + \sum_j (t - \alpha) q_j^2(t) + \sum_k (\beta - t) r_k^2(t)$$

onde p_i , q_j e r_k são polinômios reais e seja $\alpha \leq T \leq \beta$ auto-adjunto limitado. Para um polinômio f , defina $\pi(f) = f(T)$. Mostre que se $f \geq 0$, então $\pi(f) \geq 0$.

Atenção: $f(T)$ não é o cálculo funcional, é apenas o polinômio aplicado ao operador T .

- (b) Seja A a álgebra involutiva de polinômios $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$. Mostre que $\pi : A \rightarrow \mathcal{L}(H)$ definido acima é limitado.

2. [1pt] Seja $\pi : M^b(X) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ o cálculo funcional boreliano para o operador auto-adjunto T .

- (a) Seja $E \subset X$ mensurável. Mostre que $\pi(\chi_E)$ é um operador de projeção (i.e., auto-adjunto e idempotente).
- (b) Sejam $E, F \subset X$ mensuráveis com $E \cap F = \emptyset$. Mostre que $\pi(\chi_E)$ e $\pi(\chi_F)$ são operadores de projeção sobre espaços ortogonais.
- (c) Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ pontos distintos do espectro de T e sejam V_1, \dots, V_n abertos disjuntos da reta, $\lambda_j \in V_j$ para todo $j = 1, \dots, n$. Mostre que se

$$\sum_{i=1}^n a_i \pi(\chi_{V_i}) = 0,$$

então $a_i = 0$ para $i = 1, \dots, n$.

3. **[1pt]** Construa o cálculo funcional contínuo e o cálculo funcional boreliano para um operador limitado normal $T \in \mathcal{L}(H)$ supondo o Teorema Espectral para operadores normais limitados (na forma multiplicativa).

4. **[1pt]** Seja T operador simétrico densamente definido no espaço de Hilbert H e $C : H \rightarrow H$ aplicação antilinear satisfazendo

(a) $C^2 = I$.

(b) Se $\eta \in \text{dom } T$, então $C\eta \in \text{dom } T$ e $CT\eta = TC\eta$.

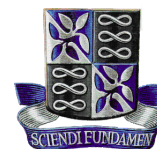
(c) Se $\eta, \xi \in H$, então $\langle C\eta, C\xi \rangle = \langle \xi, \eta \rangle$.

Prove que T possui extensão auto-adjunta.

5. **[1pt]** Seja $H = \ell^2(\mathbb{Q})$ e $h(q) = q$, para todo $q \in \mathbb{Q}$. Determine $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{M}_h)$, o espectro essencial do operador de multiplicação \mathcal{M}_h .



Prova 3 - MATD19 2015.1
Teoria Espectral
Prof. Tertuliano Franco
Data 09/07/2015
Duração: 3h+3h



2ª Parte

6. [1pt] Abaixo, pelo Teorema Espectral, cada operador é unitariamente equivalente operador de multiplicação \mathcal{M}_g . Complete a tabela com o contradomínio de g em cada caso.

| Propriedade do operador | T unit. equiv. a \mathcal{M}_g , com |
|---|---|
| T normal limitado | $g : X \rightarrow \mathbb{C}, \ g\ _\infty < \infty$ |
| T unitário | |
| T auto-adjunto limitado | |
| T auto-adjunto | |
| T auto-adjunto unitário | |
| T auto-adjunto, $T \leq \beta I$ | |
| T normal limitado, $\sigma(T) \subset \{z \in \mathbb{C} ; \text{Im } z \geq 1/2\}$ | |

7. [1pt] Seja H Hilbert e $T : H \rightarrow H$ operador auto-adjunto limitado. Mostre que existe uma (e apenas uma) representação $\pi : C(\sigma(T)) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ tal que $\pi(h) = T$, onde $h(x) = x$ para todo $x \in \sigma(T)$.

8. **[1pt]** Sejam A operador simétrico em H e $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ base ortonormal de H . Suponha que para todo k ,

- $e_k \in \text{dom } A$.
- $Ae_k = \lambda_k e_k$, onde $\lambda_k \in \mathbb{C}$.

- (a) Mostre que A é essencialmente auto-adjunto.
- (b) Determine o domínio de \bar{A} , a extensão auto-adjunta de A (basta escrevê-la em termos de algo como domínio, fecho, imagem etc. de A).
- (c) Determine um operador de multiplicação unitariamente equivalente ao operador \bar{A} .
- (d) Calcule o espectro de \bar{A} .

9. **[1pt]** Seja $A = \{\phi \in C^1[0, 1] ; \phi(0) = \phi(1)\} \subset L^2[0, 1]$. Mostre que o operador

$$\begin{cases} \text{dom } T = A \\ T\phi = \frac{1}{i}\phi' \end{cases}$$

é simétrico, densamente definido e essencialmente auto-adjunto. Determine o espectro da extensão auto-adjunta deste operador.

Como sugestão, use o seguinte fato da vida: $\{e^{2\pi kit}\}_{k \in \mathbb{N}}$ é base ortonormal de $L^2[0, 1]$.

10. **[1pt]** Dado um compacto $K \subset \mathbb{C}$, construa um operador T normal limitado cujo espectro é exatamente K .