Prova 2 - MATD19 2015.1
Teoria Espectral
Prof. Tertuliano Franco
Data 04/05/2015
Duração: 3h

Instruções: Interpretação do enunciado e conhecimento das definições fazem parte da avaliação. Não serão tiradas dúvidas durante a prova.

1. (a) **[1pt]** Seja $f \in S(\mathbb{R})$. Use integração por partes para mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx \;=\; -2\int_{\mathbb{R}} x\,\mathrm{Re}\Big(f(x)\overline{f'(x)}\Big)\, dx.$$

   (b) **[1,5pt]** Use o resultado anterior para provar o *Princípio da Incerteza*:

$$\|f\|_2^2 \;\leq\; 2\,\|xf(x)\|_2 \cdot \|\lambda \hat{f}(\lambda)\|_2\,, \qquad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

2. Nesta questão, $x \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (a) **[1,5pt]** Assuma que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 1$. Mostre que

$$\mathcal{F}\big[e^{-\frac{x^2}{2}}\big] \;=\; e^{-\frac{\lambda^2}{2}}\,.$$

   (b) **[0,5pt]** Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e $a > 0$. Se $g(x) = f(ax)$, mostre que

$$\hat{g}(\lambda) \;=\; \tfrac{1}{a}\hat{f}(\tfrac{\lambda}{a})\,.$$

   (c) **[0,5pt]** Seja $t > 0$. Calcule $\mathcal{F}\big[e^{-tx^2}\big]$.

3. **[2,5pt]** Assuma que $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Usando a transformada de Fourier, resolva a *Equação do Calor* na reta:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) \;=\; \partial_x^2 u(t,x)\,, & t>0\,,\ x\in\mathbb{R}\,,\\ u(0,x) \;=\; u_0(x)\,, & x\in\mathbb{R}\,. \end{cases}$$

   Observação: a resposta final não deve envolver a transformada de Fourier.

4. **[2,5pt]** A função característica $\phi_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de uma medida de probabilidade μ nos borelianos de $\mathbb{R}$ é definida por

$$\phi_\mu(t) \;=\; \int_{\mathbb{R}} e^{ixt}\mu(dx)\,.$$

   Qual a relação entre a função característica de μ e a transformada de Fourier de μ? Conclua que, se μ_1 e μ_2 são duas medidas de probabilidade com mesma função característica, então $\mu_1 = \mu_2$.