Prova 1 - MATD19 2015.1
Teoria Espectral
Prof. Tertuliano Franco
Data 06/04/2015
Duração: 4h

Instruções: Interpretação do enunciado e conhecimento das definições fazem parte da avaliação. Não serão tiradas dúvidas durante a prova.

1. **[2pt]** Seja C subconjunto absorvente de um espaço vetorial V com a propriedade que, se $x \in C$ e $0 \leq t \leq 1$, então $tx \in C$. Defina o funcional de Minkowski como a função $\rho : V \to [0, \infty)$ dada por $\rho(x) \;=\; \inf\{\lambda \;;\; x \in \lambda C\}$. Prove que
   (a) Se $t \geq 0$, então $\rho(tx) = t\rho(x)$.
   (b) Se C é convexo, $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$.

2. **[1,5pt]** Calcule a derivada (em distribuição) de
   (a) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{se } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$
   (b) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$
   (c) $f(x) = |x|$

3. **[1pt]** Sejam $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Mostre que $(fT)' = f'T + fT'$.

4. **[1pt]** Mostre que $L^p(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$.

5. **[1,5pt]** Sejam ϕ_n tais que $\phi_n \geq 0$, $\int \phi_n(x)dx = 1$ e, para todo $a > 0$, vale o limite $\lim_{n\to\infty} \int_{|x|>a} \phi_n(x)dx = 0$. Mostre que $\phi_n \to \delta_0$.

6. **[1pt]** Mostre que $e^{x^2} \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. (Não precisa dar detalhes de todas as contas, basta indicar o roteiro).

7. **[2pt]** Considere $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{se } x \in (0, 1] \\ 0, & \text{se } x \notin (0, 1] \end{cases}$ e defina $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ por

$$T(g) \;=\; \delta_0(g) - \delta_1(g) + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{2x^{3/2}} \big(g(0) - g(x)\big)\, dx$$

   Mostre que $f' = T$. (Não precisa mostrar que T é distribuição temperada).