Prova 3 - MAT562 2014.2
Probabilidade
Prof. Tertuliano Franco
Duração: 3h. Data 18/12/2014

1. (a) [1pt] Seja $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$. Calcule a função característica de X.
   (b) [1pt] Sendo $n \geq 2$, calcule $\mathbb{E}[X^2]$ usando a função característica.

2. (a) [1pt] Sendo $Y \sim \mathrm{U}[-1,1]$, calcule a função característica de Y.
   (b) [2pt] Seja $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tais que $\mathbb{P}[X_n = -1] = \mathbb{P}[X_n = 1] = \frac{1}{2}$ e seja

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{2^k}.$$

   Mostre que $Y_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Y$. Sugestão: use que $\cos\theta = \sin(2\theta)/(2\sin(\theta))$.

3. (a) [1pt] Dê exemplo de variáveis aleatórias tais que $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$ mas $X_n \overset{\mathrm{P}}{\nrightarrow} X$.
   (b) [1pt] Prove que se $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} c$, onde c é uma constante, então $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} c$.

4. [3pt] Seja $X_n \sim \mathrm{Bin}(n,p_n)$, onde p_n é tal que $np_n \xrightarrow{n\to\infty} \lambda$, $0 < \lambda < \infty$. Mostre que $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathrm{Poisson}(\lambda)$.