Prova 2 - MAT562 2014.2
Probabilidade
Prof. Tertuliano Franco
Duração: 3h. Data 02/12/2014

1. **[3pt]** Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tais que $X_1 \sim \mathrm{U}[0,1]$.
   (a) Prove que $n^{-X_n} \to 0$ em probabilidade;
   (b) Prove que n^{-X_n} não converge quase certamente para zero.

2. **[2pt]** Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes com distribuição N(0,1). Determine (justificando) qual o limite quase certo de
$$\frac{X_1^2 + \cdots + X_n^2}{(X_1-1)^2 + \cdots + (X_n-1)^2}$$

3. **[2pt]** Se $X_1, X_2, \ldots$ são independentes e identicamente distribuídas com $\mathbb{E}X_1 = 1$ e Var$X_1 = 1$, mostre que
$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{\sqrt{n\sum_{k=1}^n X_k^2}} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$$
quase certamente.

4. **[1pt]** Dê exemplo de um espaço de probabilidade com eventos $A_1, A_2, \ldots$ tais que $\sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}[A_k] = +\infty$ mas $\mathbb{P}\big[A_k$ infinitas vezes $\big] \neq 1$.

5. **[2pt]** Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes, $X_n \sim \mathrm{U}[0, a_n]$, onde a sequência $a_n \in \mathbb{R}$ é dada por
$$\begin{cases} a_{n+1} = n^2 a_n \\ a_1 = 1 \end{cases}$$
Dizemos que há *sucesso* no n-ésimo ensaio se $X_{2n+1} < X_{2n}$ e *fracasso* se $X_{2n+1} > X_{2n}$. Seja S_n o número de sucessos até o n-ésimo ensaio. Qual o limite de $\dfrac{S_n}{n}$?

Sugestão: não é necessário encontrar uma fórmula para a_n.