Prova 1 - MAT562 2014.2
Probabilidade
Prof. Tertuliano Franco
Duração: 3h. Data 04/11/2014

1. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$. Mostre que

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \geq 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k^{\complement}).$$

2. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes com distribuição uniforme no intervalo $[\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2}]$. Calcule a função de distribuição de $X - Y$. Calcule a densidade de $X - Y$. Conclua que ambas não dependem de θ.

3. Mariana quer enviar uma carta a Aderbal. A probabilidade de que Mariana escreva a carta é de 0,8. A probabilidade de que o correio não a perca dado que Mariana a escreveu é 0,9. A probabilidade de que o carteiro entregue na casa certa, dado que o correio não a perdeu, é de 0,7.

   Dado que Aderbal não recebeu a carta, qual a probabilidade de que Mariana não a tenha escrito?

4. Sejam $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$ e $Y_i \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$, todas independentes. Qual o limite em probabilidade da sequência

$$\frac{(X_1 + Y_1) + (X_2 + Y_2) + \cdots + (X_n + Y_n)}{n}$$

   quando n vai para mais infinito?

5. **[Extra 1pt]** Seja X integrável, $\mu = \mathbb{E}X$. Mostre que

$$\text{Var}X = \mathbb{E}(X - \mu)^2 = \min_{c \in \mathbb{R}} \mathbb{E}(X - c)^2.$$

   Conclua que se $a \leq X \leq b$, então $\text{Var}(X) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$.