

1. (a) Definição.

(b) A filtração é a sequência de reticulados.

Pensando na intensidade de cinza em cada ponto, as figuras são a esperança condicional da última imagem à direita. E como vimos,

$Z_n = E[X | \mathcal{F}_n]$ é martingal.

2. Como $A \neq \emptyset \Rightarrow A$ é subgrupo fechado de \mathbb{R}^d . Logo, $x \in A \Rightarrow x+x \in A$. Assim,

$B(0, \varepsilon) \subseteq A \Rightarrow B(0, 2\varepsilon) \subseteq A$. Por indução,

$$\bigcup_n B(0, n\varepsilon) \subseteq A.$$

3(a) Basta usar $\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$.

(b) Use $E[Z_T] = E[Z_0]$.

4. Suponha que haja 15 pessoas na sala.

A probabilidade de uma determinada pessoa acertar o próprio casaco é $\frac{1}{15}$. Por linearidade da

esperança, a esperança do número de casacos acertados será $15 \cdot \frac{1}{15} = 1$. Use $E[X_1 + \dots + X_N - N] = E[X_1 - 1]$