Prova 2 - MAT505 2013.2
Teoria da Medida
Prof. Tertuliano Franco
Data: 4/11/2013
Duração: 4h

1. **[2 pt]** Seja $f \in L(X, \mathbb{X}, \mu)$, $f \geq 0$ μ-q.t.p., e
$$\lambda(E) = \int_E f \, d\mu \,, \quad \forall \, E \in \mathbb{X} \,,$$
sua integral indefinida. Mostre que $f = 0$ μ-q.t.p. se, e somente se, $\lambda(E) = 0$ para todo $E \in \mathbb{X}$.

2. **[2 pt]** Seja $(X, \mathbb{X}, \mu)$ um espaço de medida, sendo μ medida finita. Dados $1 \leq r \leq s$, mostre que $L_s(X, \mathbb{X}, \mu) \subseteq L_r(X, \mathbb{X}, \mu)$.

   Sugestão: mostre que $|x|^r \leq 1 + |x|^s$.

3. **[2 pt]** Seja $([0,1], \mathbb{B}, \lambda)$ o intervalo $[0,1]$ com a σ-álgebra de Borel e com a medida de Lebesgue. Mostre que a sequência
$$f_n = n\chi_{[1/n, 2/n]} \,, \quad n \geq 2$$
converge μ-q.t.p., mas não converge em $L_p([0,1], \mathbb{B}, \lambda)$.

4. **[2 pt]** Seja $(\mathbb{R}, \mathbb{B}, \lambda)$ a reta com a σ-álgebra de Borel e com a medida de Lebesgue. Mostre que a sequência
$$f_n = \chi_{[n, n+1]}$$
converge μ-q.t.p., mas não converge em medida.

5. **[2 pt]** Seja $(X, \mathbb{X}, \mu)$ espaço de medida, sendo μ medida finita e $1 \leq p < \infty$. Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função contínua satisfazendo a condição:

   - existe $K > 0$ tal que $|\phi(t)| \leq K|t|$ para $|t| \geq K$.

   Mostre que se $f \in L_p$, então $\phi \circ f \in L_p$.

6. **[Extra: +0,5 pt]** Relacione as questões 3 e 4 com o Teorema de Egoroff.

7. **[Extra: +1,5 pt]** Mostre que para quaisquer números reais $x_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$,
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n} \right)^3 \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{3/2} \right)^2 \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \right)$$