Prova 1 - MAT505 2013.2
Teoria da Medida
Prof. Tertuliano Franco
Duração: 4h

1. **[2 pt]** Seja $f : X \to Y$ e $\mathbb{X}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de X. Mostre que
$$\mathbb{Y} := \{E \subseteq Y \,;\, f^{-1}(E) \in \mathbb{X}\}$$
é uma σ-álgebra de subconjuntos de Y.

2. **[2 pt]** Seja $f : X \to \mathbb{R}$ mensurável e $A > 0$. Mostre diretamente (sem utilizar resultados provados em sala, exceto a definição de mensurabilidade) que a função
$$f_A(x) = \begin{cases} f(x)\,, & \text{se } |f(x)| \leq A\,, \\ A\,, & \text{se } f(x) > A\,, \\ -A\,, & \text{se } f(x) < -A\,, \end{cases}$$
é mensurável.

3. **[2 pt]** Mostre que
$$\mu(\limsup E_n) \geq \limsup \mu(E_n)$$
desde que $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) < +\infty$. Através de um exemplo, mostre que a desigualdade acima pode não valer se $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = +\infty$.

4. **[2 pt]** Seja $(X, \mathbb{X}, \mu)$ espaço de medida finito e funções $f_n, f \in M^+(X, \mathbb{X})$ tais que f_n converge a f uniformemente. Mostre que
$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu\,.$$

5. **[2 pt]** Considere o espaço de medida $([0,1], \mathbb{B}, \lambda)$ onde $\mathbb{B}$ é a σ-álgebra de Borel e λ é a medida de Lebesgue. Existe algum conjunto aberto $A \subseteq [0,1]$ tal que A é denso em $[0,1]$ e $0 < \lambda(A) < 1$? Prove que não ou dê exemplo que sim.