Prova 1 - MAT518 2013.1
Análise no $\mathbb{R}^n$
Prof. Tertuliano Franco
Duração: 4h

Gabarito Resumido

[2 pt] Sejam $C, A \subseteq \mathbb{R}^n$, tais que $C \subseteq A$, A é um conjunto aberto e C é um conjunto compacto. Mostre a existência de um conjunto compacto D tal que $C \subseteq \text{int}D$ e $D \subseteq A$.

Solução: Para cada ponto $x \in C$, seja $B(x, \delta_x) \subseteq A$. O conjunto das bolas com metade do raio, $B(x, \frac{\delta_x}{2})$, também cobre C. Por Heine-Borel, há subcobertura finita $\{B_{x_1}, \ldots, B_{x_k}\}$, pois C é compacto. O conjunto

$$D := \bigcup_{i=1}^{k} B[x_i, \delta_{x_i}]$$

é compacto e está contido no interior de A (justifique).

[2 pt] Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função estritamente crescente. Dados os pontos distintos $x_1 \ldots, x_k \in [a, b]$, mostre que

$$\sum_{j=1}^{k} o(f, x_j) \ < \ f(b) - f(a)\,.$$

Solução: Encontre intervalos disjuntos $[x_i - \varepsilon_i, x_i + \varepsilon_i]$, argumente que

$$o(f, x_i) < f(x_i + \varepsilon_i) - f(x_i - \varepsilon_i)\,,$$

e depois some as desigualdades.

[2 pt] Uma função $f : E_1 \times E_2 \times E_3 \to \mathbb{R}$, onde $E_i = \mathbb{R}^{n_i}$ para $i = 1, 2, 3$, é dita linear em E_1 se

$$f(x_1 + \alpha x_2, y, z) \ = \ f(x_1, y, z) + \alpha f(x_2, y, z),$$

$\forall x_, x_2 \in E_1$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall y \in E_2$, $\forall z \in E_3$. Seja $f : E_1 \times E_2 \times E_3 \to \mathbb{R}$ uma função simultaneamente linear em E_1, E_2 e E_3. Encontre a derivada de f num ponto $(a, b, c) \in E_1 \times E_2 \times E_3$. (Não basta deduzir a fórmula, é necessário prová-la).

Solução: Pela multi-linearidade, escreva $f(a + h_1, b + h_2, c + h_3)$ como somas, separe $f(a, b, c)$, separe as parcelas que têm como argumento apenas um h_i e coloque como resto as que tem mais de um h_i.

[2 pt] Mostre que uma função $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$, A aberto, não pode ser injetiva.

Solução: Considere a função $F(x,y) := (x, f(x,y))$. Se $\frac{\partial f}{\partial y} \equiv 0$, então f é localmente constante em y e não pode ser injetiva. Se, para algum $(x_0, y_0) \in A$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, então $F'(x_0, y_0) \neq 0$ e aplique adequadamente o Teorema da Função Inversa.

[2 pt] Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciável tal que $f(\frac{x}{2}) = \frac{f(x)}{2}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Mostre que f é uma transformação linear.

Solução: Mostre primeiro que $f(0) = 0$. Em seguida, use a definição de diferenciabilidade ao redor de zero.