Prova 1 - MAT518 2013.1
Análise no $\mathbb{R}^n$
Prof. Tertuliano Franco
Duração: 4h

[2 pt] Sejam $C, A \subseteq \mathbb{R}^n$, tais que $C \subseteq A$, A é um conjunto aberto e C é um conjunto compacto. Mostre a existência de um conjunto compacto D tal que $C \subseteq \operatorname{int} D$ e $D \subseteq A$.

[2 pt] Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função estritamente crescente. Dados os pontos distintos $x_1 \ldots, x_k \in [a, b]$, mostre que

$$\sum_{j=1}^{k} o(f, x_j) \;<\; f(b) - f(a)\,.$$

[2 pt] Uma função $f : E_1 \times E_2 \times E_3 \to \mathbb{R}$, onde $E_i = \mathbb{R}^{n_i}$ para $i = 1, 2, 3$, é dita linear em E_1 se

$$f(x_1 + \alpha x_2, y, z) \;=\; f(x_1, y, z) + \alpha f(x_2, y, z),$$

$\forall x_{,}x_2 \in E_1$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall y \in E_2$, $\forall z \in E_3$.

Seja $f : E_1 \times E_2 \times E_3 \to \mathbb{R}$ uma função simultaneamente linear em E_1, E_2 e E_3. Encontre a derivada de f num ponto $(a, b, c) \in E_1 \times E_2 \times E_3$. (Não basta deduzir a fórmula, é necessário prová-la).

[2 pt] Mostre que uma função $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$, A aberto, não pode ser injetiva.

[2 pt] Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciável tal que $f(\frac{x}{2}) = \frac{f(x)}{2}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Mostre que f é uma transformação linear.